BとH, 再論

B and H, revisitation

吉田　清範

桐蔭横浜大学工学部

(2013年3月15日　受理)

1．序

普通，磁束密度Bは微視的な場を平均した量なので基本的な場であり，磁界Hは磁気双極子密度Mから$\mu_0 H\equiv B-M$と定義される場と説明される[1]．文献[2]では磁気双極子密度Mの磁荷モデルではHが微視的な場を平均した量なので基本的な場で，磁束密度Bは$B\equiv\mu_0 H+M$と定義される場である事を示した．磁気双極子に働く力も議論したが不十分な結果しか得られず，本論文では磁荷が存在する世界での双極子密度による電磁場の相対論的エネルギー運動量テンソルを導出する．初めに，磁荷が存在する世界での真空（双極子が存在しない）中の相対論的電磁気学を纏めておく[3]．

$$\nabla\times h=j+\partial d/\partial t,\ \nabla d=\rho,\ -\nabla\times e=j^m+\partial b/\partial t,$$

$$\nabla b=\rho^m,\ b=\mu_0 h,\ d=\varepsilon_0 e,$$

$$\nabla j+\partial\rho/\partial t=0,\ \nabla j^m+\partial\rho^m/\partial t=0.$$

$$e=-\nabla\phi-\partial A/\partial t-\nabla\times A^m/\varepsilon_0,$$

$$h=-\nabla\phi^m-\partial A^m/\partial t+\nabla\times A/\mu_0,$$

$$\nabla A+c^{-2}\partial\phi/\partial t=0,\ \nabla A^m+c^{-2}\partial\phi^m/\partial t=0,$$

$$(\Delta-c^{-2}\partial^2/\partial t^2)(A,\phi,A^m,\phi^m)$$

$$=-(\mu_0 j,\rho/\varepsilon_0,\varepsilon_0 j^m,\rho^m/\mu_0),$$

$$\{A,\phi,A^m,\phi^m\}(r,t)=\int G(r-R)\{\mu_0 j,\rho/\varepsilon_0,\varepsilon_0 j^m,\rho^m/\mu_0\}(R,t-|r-R|/c)d^3R,$$

$$G(r)\equiv 1/4\pi|r|.$$

$$u=(de+bh)/2,\ s=e\times h,\ T=de^T+bh^T-u,$$

$\nabla s+\partial u/\partial t=-je-j^m h$,（$e^T$は転置を示す）

$$\nabla T-\partial s/c^2\partial t=f=\rho e+j\times b+\rho^m h-j^m\times d.$$

$$(x^0,x^1,x^2,x^3)\equiv(ct,r),\ \partial_i\equiv\partial/\partial x^i,$$

$$\partial^i\equiv\sum g^{ij}\partial_j=\partial/\partial x_i,\ x_i\equiv\sum g_{ij}x^j,$$

$$\Box\equiv\sum\partial_i\partial^i=c^{-2}\partial^2/\partial t^2-\Delta,$$

$$g_{ij}\equiv g_{ii}\delta_{ij}=g^{ij},\ g_{00}\equiv 1,\ g_{aa}\equiv -1,$$

$$i,j=0,1,2,3;\ a,b=1,2,3.$$

$$J^i\equiv(c\rho\ j),\ A^i\equiv(\phi/c, A),$$

$$\sum\partial_i J^i=0,\ \sum\partial_i A^i=0,\ \Box A^i=\mu_0 J^i,$$

$$J_m^{\ i}\equiv(c\rho^m, j^m),\ A_m^{\ i}\equiv(\phi^m/c, A^m),$$

$$\sum\partial_i J_m^{\ i}=0,\ \sum\partial_i A_m^{\ i}=0,\ \Box A_m^{\ i}=\varepsilon_0 J_m^{\ i}.$$

$$F^{ij}\equiv\partial^i A^j-\partial^j A^i=-F^{ji},\ \sum\partial_j F^{ij}=-\mu_0 J^i,$$

$$F_m^{\ ij}\equiv\partial^i A_m^{\ j}-\partial^j A_m^{\ i}=-F_m^{\ ji},\ \sum\partial_j F_m^{\ ij}=-\varepsilon_0 J_m^{\ i},$$

$$F_*^{\ ij}\equiv\sum\varepsilon^{ijkl}F_{kl}/2,\ \sum\partial_j F_*^{\ ij}=0,\ F_{**}=-F.$$

$$G^{ij}\equiv F^{ij}-F_{m*}^{\ \ ij}/\varepsilon_0 c,\ (G^{01},G^{02},G^{03})=-e/c,$$

$$(G^{23},G^{31},G^{12})=-\mu_0 h,\ \sum\partial_j G^{ij}=-\mu_0 J^i,$$

$$G_m^{\ ij}\equiv F_m^{\ ij}-F_*^{\ ij}/\mu_0 c,\ (G_m^{\ 01},G_m^{\ 02},G_m^{\ 03})=-h/c,$$

$$(G_m^{\ 23},G_m^{\ 31},G_m^{\ 12})=\varepsilon_0 e,\ \sum\partial_j G_m^{\ ij}=-\varepsilon_0 J_m^{\ i}.$$

$$S^{ij}\equiv\mu_0^{-1}\sum(-G^{il}G^{j}{}_{l}+g^{ij}G^{lm}G_{lm}/4)$$

$$=\varepsilon_0^{-1}\sum(-G_m^{\ il}G_m{}^{j}{}_{l}+g^{ij}G_m^{\ lm}G_{m,lm}/4)=S^{ji},$$

$$S^{00}=u,\ S^{0a}=s/c,\ S^{ab}=-T^{ab},$$

$$\sum\partial_j S^{ij}=-f^i$$

Kiyonori Yoshida：Department of Electronics and Information Engineering, Toin University of Yokohama, 1614 Kurogane-cho, Aoba-ku, Yokohama, Japan 225-8503

$\equiv -(c^{-1}(je+j^m h), \rho e+j\times b+\rho^m h-j^m\times d)$.
$\Sigma \partial_j S^{ij}+f^i=0$ は場（e,h 等）と物質（ρ, j 等）とにおける全エネルギー運動量保存則を表わし，S^{ij} は場のエネルギー運動量テンソル，S^{00} は場のエネルギー密度，cS^{0a} は場のエネルギー流密度 s，cf^0 は場が物質に与える単位時間エネルギー密度，$c^{-1}S^{a0}$ は場の運動量密度 g，S^{ab} は場が物質に与える応力テンソル，f^a は場が物質に与える力密度と解釈できる．但し，実際にそうなるのは S^{ij} が対称の場合で（非対象 $S'^{ij}\equiv S^{ij}+F_*{}^{ij}$ でも $f'^i=-\Sigma\partial_j S'^{ij}$ と f'^i を計算可），$s=e\times h$, $g=s/c^2$, $S^{a0}=S^{0a}$ $(s=cu, g=u/c)$.
質量密度 ρ が速度 v で動く弾性体が場で，物質が外力 $-f^i$ を場に与えている時，$s=\rho c^2 v$, $g=\rho v=s/c^2$, $S^{a0}=S^{0a}$. ローレンツ変換は，
速度 u で動く座標系 $x'^i=(ct', r')$ では，

$ct'=\gamma(ct-c^{-1}ur)$, $r'=C_\perp r+\gamma(C_{/\!/}r-ut)$,
$\gamma\equiv(1-u^2/c^2)^{-1/2}$, $C_{/\!/}\equiv uu^T/u^2$, $C_\perp\equiv 1-C_{/\!/}$,
$\partial/\partial t'=\gamma(\partial/\partial t+u\nabla)$,
$\nabla'=C_\perp\nabla+\gamma(C_{/\!/}\nabla+c^{-2}u\partial/\partial t)$,
$e'=C_{/\!/}e+C_\perp\gamma(e+u\times b)$,
$b'=C_{/\!/}b+C_\perp\gamma(b-c^{-2}u\times e)$.

2．双極子密度による仮想的な電磁場ソースが作る電磁場

電気双極子は無限小距離の正負電荷か無限小ループ磁流で，磁気双極子は無限小距離の正負磁荷か無限小ループ電流でモデル化できる．電気双極子密度 $P=P^Q+P^m$（電荷モデルの P^Q, 磁流モデルの P^m），磁気双極子密度 $M=M^I+M^m$（電流モデルの M^I, 磁荷モデルの M^m）はモデル依存の電磁場ソースを与え，

$\rho_{PQ}=-\nabla P^Q$, $j_{PQ}=\partial P^Q/\partial t$, $j_{MI}=\nabla\times M^I/\mu_0$,
$\rho^m{}_{Mm}=-\nabla M^m$, $j^m{}_{Mm}=\partial M^m/\partial t$, $j^m{}_{Pm}=-\nabla\times P^m/\varepsilon_0$.

この仮想的なソースが真空中で作る電磁場 F_{vac} は双極子密度が作るものと一致する事，結晶構造に依存する局所場 (Lorenz local field) も微小穴の形を適当に選べば一致する事は次節で示す．双極子密度以外のソースを j_f, ρ_f, $j^m{}_f$, $\rho^m{}_f$ と記して[2]，

$b, h, d, e=F_{vac}(j_f+j_{PQ}+j_{MI}, \rho_f+\rho_{PQ}, j^m+j^m{}_{Mm}+j^m{}_{Pm}, \rho^m{}_f+\rho^m{}_{Mm})$,
$b=\mu_0 h$, $d=\varepsilon_0 e$.
$B\equiv b+M^m$, $E\equiv e-P^m/\varepsilon_0$,
$H\equiv h-M^I/\mu_0$, $D\equiv d+P^Q$,
$M\equiv M^I+M^m$, $P\equiv P^Q+P^m$, $B=\mu_0 H+M$, $D=\varepsilon_0 E+P$,
$\rho_P\equiv-\nabla P$, $j_P\equiv\partial P/\partial t$, $j_M\equiv\nabla\times M/\mu_0$,
$\rho^m{}_M\equiv-\nabla M$, $j^m{}_M\equiv\partial M/\partial t$, $j^m{}_P\equiv-\nabla\times P/\varepsilon_0$,
$B, E=F_{vac}(j_f+j_M+j_P, \rho_f+\rho_P, j^m{}_f, \rho^m{}_f)$,
$H, D=F_{vac}(j_f, \rho_f, j^m{}_f+j^m{}_M+j^m{}_P, \rho^m{}_f+\rho^m{}_M)$,
$H, E=F_{vac}(j_f+j_P, \rho_f+\rho_P, j^m{}_f+j^m{}_M, \rho^m{}_f+\rho^m{}_M)$,
$B, D=F_{vac}(j_f+j_M, \rho_f, j^m{}_f+j^m{}_P, \rho^m{}_f)$,
$M, -P=F_{vac}(j_M+j_P, \rho_P, -j^m{}_M-j^m{}_P, -\rho^m{}_M)$.
$\nabla\times H=j_f+\partial D/\partial t$, $\nabla D=\rho_f$,
$\nabla\times E=-j^m{}_f-\partial B/\partial t$, $\nabla B=\rho^m{}_f$.

真空場 $b=\mu_0 h$, $d=\varepsilon_0 e$ は双極子モデルに依存し，電気 (磁気) 双極子密度 P(M) が作る真空場のモデル差は双極子密度の外部では零で，

$F_{vac}(j_P, \rho_P, 0,0)-F_{vac}(0,0, j^m{}_P, 0)=0, -P$,
$F_{vac}(j_M, 0, 0,0)-F_{vac}(0,0, j^m{}_M, \rho^m{}_M)=M, 0$.

B,E,H,D は双極子モデルに依存せず，双極子の全てが電荷電流（磁荷磁流）モデルの時の真空場が B,E (H,D) で B − E (H − D) 対応，電荷磁荷（電流磁流）モデルの時の真空場が H,E (B,D) で H − E (B − D) 対応となる．場は真空中の e,b, 物質は ρ_f, j_f と双極子密度とみれば，場のエネルギー運動量テンソルは真空中の電磁場の対称な S^{ij} であり，双極子モデルに依存して運動量密度 $g=E\times H/c^2$：電荷磁荷モデル，$D\times B$：電流磁流モデル，$\varepsilon_0 E\times B$：電荷電流モデル，$\mu_0 D\times H$：磁荷磁流モデルとなる．

構成方程式 $D=\varepsilon E$, $B=\mu H$ での ε, μ が場所と時間に依存しないスカラーの場合，双極子密度を消去できるがエネルギー運動量テンソル S'^{ij} は対称でなくなり，

$\mu\varepsilon c'^2=1$, $D=\varepsilon E=\varepsilon_0 E+P$, $B=\mu H=\mu_0 H+M$,
$-\Sigma\partial_j S'^{ij}=(c^{-1}j_f E, \rho_f E+j_f\times B)$,
$s=E\times H$, $g=E\times H/c'^2=D\times B$.

双極子を場側に入れた時の対称な S'^{ij} は構成されていないようだが，非対称な S'^{ij} でも ρ_f, j_f に働く力を計算したいときには有用である．

3．双極子密度が作る電磁場による力

双極子密度 $M=M^I+M^m$, $P=P^Q+P^m$ が作る電磁場や力を議論するために，動く点電荷・点磁荷に対し[3],

$\rho(\mathbf{r},t)=\Sigma q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))$,

$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\Sigma q_i\mathbf{v}_i(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))$,

$\mathbf{v}_i\equiv d\mathbf{r}_i/dt,\ |\mathbf{v}_i|<c$,

$\{A,\phi\}(\mathbf{r},t)=\Sigma q_i\{\mu_0\mathbf{v}_i(t_i),\varepsilon_0^{-1}\}$

$/4\pi\{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t_i)|-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t_i))\mathbf{v}_i(t_i)/c\}$,

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t_i)|=c(t-t_i)$.

$\rho^m(\mathbf{r},t)=\Sigma q^m_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^m_i(t))$,

$\mathbf{j}^m(\mathbf{r},t)=\Sigma q^m_i\mathbf{v}^m_i(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^m_i(t))$,

$\mathbf{v}^m_i\equiv d\mathbf{r}^m_i/dt,\ |\mathbf{v}^m_i|<c$,

$\{A^m,\phi^m\}(\mathbf{r},t)=\Sigma q^m_i\{\varepsilon_0\mathbf{v}^m_i(t_i),\mu_0^{-1}\}$

$/4\pi\{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^m_i(t_i)|-(\mathbf{r}-\mathbf{r}^m_i(t_i))\mathbf{v}^m_i(t_i)/c\}$,

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}^m_i(t_i)|=c(t-ti)$.

$\mathbf{r}=\mathbf{r}_i(t)$ or $\mathbf{r}^m_i(t)$ は特異点で，i番目以外の点電荷・点磁荷が作る電磁場 $\mathbf{e}_i(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{b}_i(\mathbf{r},t)$,
i番目の半径 a_0, a^m_0 の球の一様電荷・磁荷が作る電磁場の反作用力 $\mathbf{f}^s_i(t)$, $\mathbf{f}^{ms}_i(t)$ に対し，

$\mathbf{f}_i(t)-\mathbf{f}^s_i(t)$

$=q_i\{\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i(t),t)+\mathbf{v}_i(t)\times\mathbf{b}_i(\mathbf{r}_i(t),t)\}$,

$\mathbf{f}^m_i(t)-\mathbf{f}^{ms}_i(t)$

$=q^m_i\{\mathbf{h}_i(\mathbf{r}^m_i(t),t)-\mathbf{v}^m_i(t)\times\mathbf{d}_i(\mathbf{r}^m_i(t),t)\}$,

$\mathbf{f}^s_i(t)\fallingdotseq(q_i^2/3\pi\varepsilon_0a_0c^2)d\mathbf{v}_i/dt$

$+(q_i/6\pi\varepsilon_0c^3)d^2\mathbf{v}_i/dt^2$,

$\mathbf{f}^{ms}_i(t)\fallingdotseq(q^{m2}_i/3\pi\mu_0a^m_0c^2)d\mathbf{v}^m_i/dt$

$+(q^m_i/6\pi\mu_0c^3)d^2\mathbf{v}^m_i/dt^2$.

力は相異なる点電荷・点磁荷に対して働くとせざるを得ない（自身が作る電磁場の電磁質量が発散．放射損失力も小さいので普通は無視）[3]

電気双極子密度Pの電荷モデルは，$q_i\fallingdotseq\infty$，一様ランダム分布 $\mathbf{r}_i$ に対し，

$\rho(\mathbf{r},t)=\Sigma q_i\{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i-\mathbf{p}_i(t)/q_i)-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\}$,

$j(\mathbf{r},t)=\Sigma(d\mathbf{p}_i/dt)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$,

$\mathbf{p}_i(t)\equiv P(\mathbf{r}_i,t)\delta V$,

$\{A,\phi\}(\mathbf{r},t)\equiv\lim\Sigma\{c^{-2}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|d\mathbf{p}_i/dt_i$

$,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\{\mathbf{p}_i(t_i)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$

$+c^{-1}d\mathbf{p}_i/dt_i\}\}/4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2$

$=\int G(\mathbf{r}-\mathbf{R})$

$\{\mu_0\partial P/\partial t,-\nabla P/\varepsilon_0\}(\mathbf{R},t-|\mathbf{r}-\mathbf{R}|/c)d^3\mathbf{R}$,

$t_i\equiv t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|/c$,

$\{f^0,f\}=\{c^{-1}e\partial P/\partial t,(P\nabla)e+(\partial P/\partial t)\times b\}$

$=\{0,\nabla(eP^T)\}$

$+\{c^{-1}e\partial P/\partial t,-(\nabla P)e+(\partial P/\partial t)\times b\}$.

導出は容易で，

$q_i/[|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i-\mathbf{p}_i(t_i)/q_i|$

$-\{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i-\mathbf{p}_i(t_i)/q_i\}\mathbf{v}_i(t_i)/c]-q_i/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$

$\fallingdotseq(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\{\mathbf{p}_i(t_i)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$

$+(d\mathbf{p}_i/dt_i)/c\}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2$.

$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i-\mathbf{p}_i(t_i)/q_i|=c(t-t_i)\fallingdotseq|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$.

$\int|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^{-1}(-\nabla_R P)(\mathbf{R},t-|\mathbf{r}-\mathbf{R}|/c)d^3\mathbf{R}$

$=\int|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^{-1}\{-\nabla_R P(\mathbf{R},t-|\mathbf{r}-\mathbf{R}|/c)$

$-(\nabla_R|\mathbf{r}-\mathbf{R}|/c)\partial P(\mathbf{R},t-|\mathbf{r}-\mathbf{R}|/c)/\partial t\}d^3\mathbf{R}$

$=\int\{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^{-3}(\mathbf{r}-\mathbf{R})P(\mathbf{R},t-|\mathbf{r}-\mathbf{R}|/c)$

$+c^{-1}|\mathbf{r}-\mathbf{R}|-1(\mathbf{r}-\mathbf{R})\partial P(\mathbf{R},t-|\mathbf{r}-\mathbf{R}|/c)/\partial t\}d^3\mathbf{R}$

$\fallingdotseq\Sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\{\mathbf{p}_i(t_i)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|+c^{-1}d\mathbf{p}_i/dt_i\}$

$/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2$.

$\mathbf{v}_i(t_i)q_i/\{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t_i)|-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t_i))\mathbf{v}_i(t_i)/c\}$

$\fallingdotseq(d\mathbf{p}_i/dt_i)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$.

$\int|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^{-1}(\partial P/\partial t)(\mathbf{R},t-|\mathbf{r}-\mathbf{R}|/c)d^3\mathbf{R}$

$\fallingdotseq\Sigma(d\mathbf{p}_i/dt_i)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|$.

$\mathbf{r}_i$ は特異点で，電磁場が収束するのは $\mathbf{r}_i$ 近傍以外で，$\mathbf{e}_i(\mathbf{r},t)\equiv\mathbf{e}(\mathbf{r},t)$ at $\mathbf{r}_i$ 近傍，等とすれば，$\mathbf{e}_i$ は激しく変動する（$\mathbf{e}(\mathbf{r},t)$ は $\mathbf{r}_i$ 近傍以外では収束）．電気双極子 $\mathbf{p}_i$ 中の磁流 $\mathbf{j}^m$ は $-\mathbf{j}^m\times\mathbf{d}_i$ の力を $\mathbf{p}_i$ から受けて，その反作用力を $\mathbf{p}_i$ が受けるが，物質（$\mathbf{p}_i$ と $\mathbf{j}^m$）が受ける力は相殺するので計算から外す．発散する引力 $q_i^2/4\pi\varepsilon_0(\mathbf{p}_i/q_i)^2$ も相殺するので，

$\mathbf{f}_i=q_i\{\mathbf{e}(\mathbf{r}_i+\mathbf{p}_i(t)/q_i,t)-\mathbf{e}(\mathbf{r}_i,t)\}$

$+(d\mathbf{p}_i/dt)\times\mathbf{b}(\mathbf{r}_i,t)$,

$cf^0_i=(d\mathbf{p}_i/dt)\mathbf{e}(\mathbf{r}_i,t)$.

$\nabla(eP^T)=(\nabla P)e+(P\nabla)e$.

双極子の近傍を除いて電磁場は仮想的ソースが作る電磁場に収束する（自己エネルギー $-q_i^2/4\pi\varepsilon_0|\mathbf{p}_i|$ は発散）．有限個の双極子では結晶構造に依存する局所場 (Lorenz local field) を与え，適当な微小穴を持つ双極子密度の仮想的ソースが作る電磁場になる．力は電磁場が仮想的ソースに働く力とは一致しない（全合力は一致するが，物質の各場所に働

く力を計算したい時にはその違いが重要である).

磁気双極子密度Mの電流モデルの解析は困難だが，電磁場は仮想的ソースのと一致すると思われる．力は，

$$\{\mu_0 cf^0, \mathbf{f}\}=\{(\mathbf{M}\times\nabla)\mathbf{e}, (\mathbf{M}\times\nabla)\times\mathbf{h}\}$$
$$=\{\nabla(\mathbf{e}\times\mathbf{M}), \nabla(\mathbf{Mh}-\mathbf{Mh}^T)\}$$
$$+\{(\nabla\times\mathbf{M})\mathbf{e}, (\nabla\times\mathbf{M})\times\mathbf{h}\}.$$

導出は容易で，

$$\mathbf{m}_i(t)\equiv\mathbf{M}(\mathbf{r}_i,t)\,\delta V=|\mathbf{m}_i|(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2),$$
$$|\mathbf{m}_i|=\mu_0\pi R^2 I,$$
$$\mathbf{f}_i=\int\mathbf{j}(\mathbf{r}_i+\mathbf{R},t)\times\mathbf{b}(\mathbf{r}_i+\mathbf{R},t)d^3R$$
$$=\int(\mathbf{m}_i\times\mathbf{R})\times(\mathbf{R}\nabla)\mathbf{h}dR/\pi R^3$$
$$=(\mathbf{m}_i\times\mathbf{u}_1)\times(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{h}+(\mathbf{m}_i\times\mathbf{u}_2)\times(\mathbf{u}_2\nabla)\mathbf{h}$$
$$=|\mathbf{m}_i|\{(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_2-(\mathbf{u}_2\nabla)\mathbf{u}_1\}\times\mathbf{h}=$$
$$=|\mathbf{m}_i|\{(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)\times\nabla\}\times\mathbf{h}=(\mathbf{m}_i\times\nabla)\times\mathbf{h},$$
$$(\mathbf{M}\times\nabla)\times\mathbf{h}-(\nabla\times\mathbf{M})\times\mathbf{h}=\nabla_h(\mathbf{Mh})-\mathbf{M}(\nabla\mathbf{h})$$
$$-(\mathbf{h}\nabla)\mathbf{M}+\nabla_M(\mathbf{Mh})=\nabla(\mathbf{Mh})-\nabla(\mathbf{Mh}^T).$$
$$cf^0_i=\int\mathbf{j}(\mathbf{r}_i+\mathbf{R},t)\mathbf{e}(\mathbf{r}_i+\mathbf{R},t)d^3R$$
$$=\int(\mathbf{m}_i\times\mathbf{R})(\mathbf{R}\nabla)\mathbf{e}dR/\mu_0\pi R^3$$
$$=\{(\mathbf{m}_i\times\mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{e}+(\mathbf{m}_i\times\mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_2\nabla)\mathbf{e}\}/\mu_0$$
$$=|\mathbf{m}_i|\{(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_2-(\mathbf{u}_2\nabla)\mathbf{u}_1\}\mathbf{e}/\mu_0$$
$$=|\mathbf{m}_i|\{(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)\times\nabla\}\mathbf{e}/\mu_0.$$
$$\nabla(\mathbf{e}\times\mathbf{M})=(\mathbf{M}\times\nabla)\mathbf{e}-(\nabla\times\mathbf{M})\mathbf{e}.$$
$$(\mathbf{M}\times\nabla)\times\mathbf{h}=\nabla_h(\mathbf{Mh})-\mathbf{M}(\nabla\mathbf{h}),$$
$$(\nabla\times\mathbf{h})\times\mathbf{M}=(\mathbf{M}\nabla)\mathbf{h}-\nabla_h(\mathbf{Mh}).$$

磁気双極子密度の磁荷モデルや電気双極子密度の磁流モデルでも同様な式を導出できる．

4．一様に動く双極子密度が作る電磁場のエネルギー運動量テンソル

双極子密度は静止双極子の密度と定義されるので，双極子が動く場合は，一様に速度$\mathbf{u}$で動く場合のみ，特殊相対論で定式化できる(速度が場所に依存する場合は一般相対論が必要になる)．双極子密度が作る電磁場は仮想的ソースが作る電磁場と一致するが，力は仮想的ソースに働く力とは異なり(全合力は一致)，場のエネルギー運動量テンソルは双極子の速度$\mathbf{u}$を含む事になる．

$$\{c(\rho_f+\rho_{PQ}), \mathbf{j}_f+\mathbf{j}_{PQ}+\mathbf{j}_{MI}\}$$
$$=\{c\nabla\mathbf{d}, \nabla\times\mathbf{h}-\partial\mathbf{d}/\partial t\},$$
$$\{c(\rho^m_f+\rho^m_{Mm}), \mathbf{j}^m_f+\mathbf{j}^m_{Mm}+\mathbf{j}^m_{Pm}\}$$
$$=\{c\nabla\mathbf{b}, -\nabla\times\mathbf{e}-\partial\mathbf{b}/\partial t\}$$

は4元ベクトルなので，$\{-c\mathbf{P}^Q, \mathbf{M}^I/\mu_0\}$は反対称テンソル$\{c\mathbf{d}, \mathbf{h}\}$と，$\{-c\mathbf{M}^m, \mathbf{P}^m/\varepsilon_0\}$は反対称テンソル$\{c\mathbf{b}, \mathbf{e}\}$と同じローレンツ変換に従う(速度$\mathbf{u}$で動く双極子密度の定義)．双極子密度の静止座標系では，

$$\{f^0,\mathbf{f}\}=\{c^{-1}\nabla(\mu_0^{-1}\mathbf{e}\times\mathbf{M}^I+\varepsilon_0^{-1}\mathbf{P}^m\times\mathbf{h})$$
$$,\nabla(\mathbf{eP}^{Q,T}-\mathbf{M}^I\mathbf{h}^T+\mathbf{M}^I\mathbf{h}+\mathbf{hM}^{m,T}-\mathbf{P}^m\mathbf{e}^T+\mathbf{P}^m\mathbf{e})\}$$
$$+\{c^{-1}(\mathbf{j}_f+\mathbf{j}_{PQ}+\mathbf{j}_{MI})\mathbf{e}+c^{-1}(\mathbf{j}^m_f+\mathbf{j}^m_{Mm}+\mathbf{j}^m_{Pm})\mathbf{h}$$
$$,(\rho_f+\rho_{PQ})\mathbf{e}+(\mathbf{j}_{PQ}+\mathbf{j}_{MI})\times\mathbf{b}$$
$$+(\rho^m_f+\rho^m_{Mm})\mathbf{h}-(\mathbf{j}^m_f+\mathbf{j}^m_{Mm}+\mathbf{j}^m_{Pm})\times\mathbf{d}\}.$$

仮想的ソースに働く力との違いが$\partial/\partial t$の項を含まないので，$\partial_j S^{ij}=-f^i$のS^{ij}の対称化は困難である(真空の電磁場だが，双極子の自己エネルギーが発散する事から生じていると思われる)．双極子密度が速度$\mathbf{u}$で動く座標系では，

$$\{f^0,\mathbf{f}\}=-\Sigma\,\partial_j S_u^{ij},$$
$$S_u^{ij}\equiv S^{ij}+\Sigma\,\{G^{il}(K^j{}_l+c^{-2}K^n{}_l u_n u^j)$$
$$+G_m{}^{il}(K_m{}^j{}_l+c^{-2}K_m{}^n{}_l u_n u^j)\},$$
$$u^i\equiv\gamma(c,\mathbf{u}),\ \gamma\equiv(1-u^2/c^2)^{-1/2},$$
$$(G^{01},G^{02},G^{03})=-\mathbf{e}/c,\ (G^{23},G^{31},G^{12})=-\mu_0\mathbf{h},$$
$$(G_m{}^{01},G_m{}^{02},G_m{}^{03})=-\mathbf{h}/c,\ (G_m{}^{23},G_m{}^{31},G_m{}^{12})=\varepsilon_0\mathbf{e},$$
$$(K^{01},K^{02},K^{03})\equiv c\mathbf{P}^Q,\ (K^{23},K^{31},K^{12})\equiv-\mathbf{M}^I/\mu_0,$$
$$(K_m{}^{01},K_m{}^{02},K_m{}^{03})\equiv c\mathbf{M}^m,\ (K_m{}^{23},K_m{}^{31},K_m{}^{12})\equiv\mathbf{P}^m/\varepsilon_0.$$
$$S_u^{00}=(\mathbf{de}+\mathbf{bh})/2+\mathbf{P}^Q\mathbf{e}+\mathbf{M}^m\mathbf{h}$$
$$+\gamma^2\{-\mathbf{P}^Q\mathbf{e}-\mathbf{M}^m\mathbf{h}-(\mathbf{d}\times\mathbf{M}^I-\mathbf{b}\times\mathbf{P}^m)\mathbf{u}\},$$
$$S_u^{a0}=(\mathbf{e}\times\mathbf{h})/c-c\mathbf{b}\times\mathbf{P}^Q+c\mathbf{d}\times\mathbf{M}^m$$
$$+\gamma^2 c(\mathbf{b}\times\mathbf{P}^Q-\mathbf{d}\times\mathbf{M}^m)$$
$$+\gamma^2\{(\mathbf{u}\times\mathbf{M}^I)\times\mathbf{h}+(\mathbf{u}\times\mathbf{P}^m)\times\mathbf{e}$$
$$-(\mathbf{uP}^Q)\mathbf{e}-(\mathbf{uM}^m)\mathbf{h}\}/c,$$
$$S_u^{0a}=(\mathbf{e}\times\mathbf{h})/c-c\mathbf{d}\times\mathbf{M}^I-c\mathbf{P}^m\times\mathbf{b},$$
$$S_u^{ab}=(\mathbf{de}+\mathbf{bh})/2-\mathbf{eP}^m-\mathbf{hM}^I-\mathbf{Ed}^T-\mathbf{Hb}^T-\mathbf{eP}^{Q,T}-\mathbf{hM}^{m,T}.$$

導出は容易で，

$$X^{ij}\equiv-\Sigma\,G^{il}K^j{}_l,\ X^{00}=\Sigma\,G^{0l}K^{0l}=-\mathbf{P}^Q\mathbf{e},$$
$$X^{0a}=\Sigma\,G^{0l}K^{al}=c\mathbf{d}\times\mathbf{M}^I,\ X^{a0}=\Sigma\,G^{al}K^{0l}=c\mathbf{b}\times\mathbf{P}^Q,$$
$$X^{ab}=-G^{a0}K^{b0}+\delta_{ab}\,\Sigma\,G^{ac}K^{ac}+(1-\delta_{ab})\,\Sigma\,G^{ac}K^{bc}$$
$$=e_a P^Q{}_b+\delta_{ab}(\mathbf{hM}^I-h_a M^I{}_a)-(1-\delta_{ab})M^I{}_a h_b\}$$
$$=\mathbf{hM}^I+\mathbf{eP}^{QT}-\mathbf{M}^I\mathbf{h}^T.$$
$$\Sigma\,\partial_j X^{ij}=\{-c^{-1}\partial(\mathbf{P}^Q\mathbf{e})/\partial t+c\nabla(\mathbf{d}\times\mathbf{M}^I)$$

$$,\partial(b \times PQ)/\partial t + \nabla(hM^I + eP^{QT} - M^I h^T)\}.$$

$X_m^{00} = -M^m h,\ X_m^{0a} = -cb \times P^m,\ X_m^{a0} = -cd \times M^m,$

$X_m^{ab} = eP^m + hM^{mT} - P^m e^T$ by exchange.

$$\Sigma\, \partial_j X_m^{ij} = \{-c^{-1}\partial(M^m h)/\partial t - c\nabla(b \times P^m)$$

$$, -\partial(d \times M^m)/\partial t + \nabla(eP^m + hM^{mT} - P^m e^T)\}.$$

静止座標系では，$\{f^0, f\} = \Sigma\, \partial_j(X^{ij} + X_m^{ij} - S^{ij})$

$+\{c^{-1}\partial(P^Q e + M^m h)/\partial t, \partial(-b \times P^Q + d \times M^m)/\partial t\},$

$Y^{ij} \equiv c^{-2}\, \Sigma\, (X^{il} + X_m^{il}) u_l u^j,\ u^i = (c, 0),$

$Y^{ij} = (X^{i0} + X_m^{i0})\, \delta_{j0}$

$= \{-P^Q e - M^m h,\ c(b \times P^Q - d \times M^m)\}\, \delta_{j0}.$

静止系で一致し，S^{ij} 等は 4 元テンソルで，任意の座標系で一致.

構成方程式から双極子密度が仮想的ソースが作る真空の電磁場 b,e から定まれば（非線形でも非局所でも場所や時間に依存してもよい），エネルギー運動量テンソル S_u^{ij} は電磁場だけから定まる．S_u^{ij} が非対称なので，双極子密度の内部自己場の運動量密度等は不明だが，物質（ρ_f, j_f と双極子密度）に働く力 $\{f^0, f\}$ を計算するのには役立つ．現実の世界では磁荷は存在せず，

$S_u^{0a} = (E \times H)/c.$

従って，双極子密度の内部自己エネルギーも含めたエネルギー流れ密度は E × H のようで，運動量密度は $(E \times H)/c^2$ と思われる．

【参考文献】

[1] ファイマン：ファイマン物理学，
岩波書店（1989）．

[2] 吉田清範：BとH，
桐蔭論叢 3，pp. 52 － 53 (1996).

[3] 砂川重信：理論電磁気学，
紀伊国屋書店 （1973）．