

研究ノート

空中超音波の音響放射圧
——気体分子運動論的アプローチ——Acoustic Radiation Pressure of Aerial Ultrasonic Waves;
An Approach by Kinetic Theory of Gases

佐野 元昭

桐蔭横浜大学医用工学部

(2018 年 3 月 17 日 受理)

I. はじめに

物体に超音波を当てると、不思議なことに、物体は一定の圧力を受けます。これを音響放射圧といいます。また、その力を音響放射力といいます。この現象は、軽いものを浮遊させるだけでなく、液滴の制御¹⁾、生体組織などの硬さ推定²⁾、VR における触覚の実現など³⁾、さまざまな応用例が報告されています。私たちの研究室でも、植物の葉を自動的かつ均一に加振するために、音響放射圧を利用しています⁴⁾。

しかし、音響放射圧がどのように発生するのかについては、あまり簡単な説明はありません。そこで本稿では、最もイメージしやすいと思われる気体分子運動論という理論を用いて、音響放射圧について考えてみたいと思います。

II. 超音波

1. 音波の分類

(1) 可聴音

人の話し声、音楽、小鳥のさえずり、雨や風の音など、私たちは普段さまざまな音を耳にしています。このように、人が普通に聞くことができる音を可聴音といいます。

ところで、ご存知の通り、音は物体の振動

が、波として空気などの媒質を伝播（でんぱ）したものであり、その振動の周波数[Hz]（ヘルツ）が低ければ「低い音」、高ければ「高い音」に聞こえます。たとえば、音楽の「ラ(A)」の音は 440 Hz、人の話し声は 100 Hz ~ 1 kHz 程度、鈴虫の鳴き声は 4 kHz 程度といわれていますが、周波数が高くなるにつれ、高い音になります。

しかし、人間の耳には、どんな周波数の音でも聞こえる訳ではありません。最も耳の良いとされる 10 代以下の若者でも、聞こえるのは約 20 Hz から 20 kHz までの音です。逆にいえば、これ以外の周波数の音は、人間の耳には聞こえません。このように人に聞こえない周波数の音を、一般に超音波と呼びます。

(2) 超音波

超音波は、要するに人の耳に聞こえない周波数の音ですが、特に周波数が高い超音波は、

- ① 波長が短い、
- ② 直進性が強い、
- ③ 振動エネルギー密度が高い

など、高周波に由来する色々な性質があり、これらの性質は、たとえば、メガネや時計バンドなどの洗浄（超音波洗浄）、食品パック

などの溶着（超音波溶着）、内臓や胎児の検査（超音波検査）、魚群探知（ソナー）、超音波モータ、超指向性スピーカなど、産業レベルから日常生活にいたるまで、さまざまに利用されています。

2. 非線形性と放射圧

(1) 非線形性

超音波の性質として、上記以外に、非線形性に由来するものがあります。非線形性とは、線形でないことを意味しますが、「線形」とは、出力が入力に比例することをいいます。たとえば、ばねの復元力の大きさ F [N]は、伸び x [m]に比例し、 $F = -kx$ (k は比例定数)の関係（フックの法則）が成り立ちます。これは線形な現象です。しかし、ばねの伸び x が大きくなると、比例関係からずれて、 x の2次以上の項が現れます。これが非線形性です。超音波の放射圧も、このような非線形性によって生じる現象と考えられています。

(2) 放射圧

超音波には放射圧が存在することを述べましたが、たとえば図1のように、エネルギー密度 E [J/m³]の平面波が、進行方向に垂直な平面で全反射された場合、その平面に働く放射圧は、 $P = 2E$ [Pa]になることが知られています⁵⁾。これをランジュバンの放射圧といいます。（エネルギー密度の単位は、[J/m³] = [N/m²] = [Pa]のように、実は圧力の単位と等価になります。）

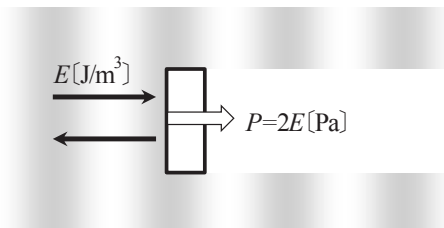


図1 放射圧

ここで、媒質の密度を ρ [kg/m³]、音速を c [m/s]、壁面での音圧を p [Pa]とすると、その壁に働く放射圧 [Pa]は、後述のように

$$P = 2E = 2 \frac{p^2}{\rho c^2} \quad (1)$$

で与えられます。

次章では、この放射圧を、気体分子運動論の立場から考えて行くことにします。

III. 気体分子運動論

1. 気体分子1個の圧力

気体分子運動論とは、気体の性質を、気体分子の運動から説明する理論です。ご存知の通り、気体は気体分子からなり、たとえば空気は、主に窒素分子 (N₂) と酸素分子 (O₂) が約 4 対 1 に混ざったものです。この気体分子は、熱エネルギーを受けて高速に飛び回っていますが、それが壁に衝突した際の反作用が、気体の圧力に他なりません。

いま、図2のように、一辺の長さ L [m]の立方体容器に閉じ込められた N 個の気体分子を考えてみます。ただし簡単のために、回転を考えなくてよい一種類の単原子分子（質量 m [kg]）とします。

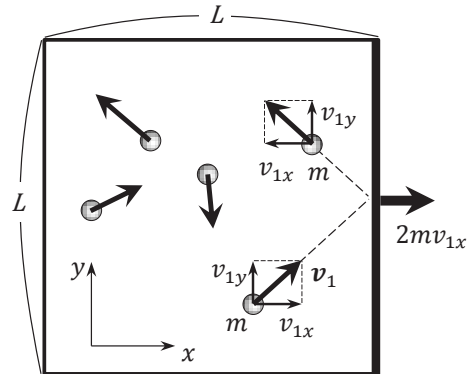


図2 気体分子が及ぼす力積

まず、1個の気体分子に着目し、その速度を $\mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ [m/s]とすると、この気体分子が、容器の x 軸に垂直な壁（図の太線の壁）に衝突して跳ね返される際の運動量の変化は、エネルギー損失がない弾性衝突の場合、 $-2mv_{1x}$ [kg・m/s]になります。すなわち、この気体分子が壁から受けた力積 [N・s]は

$$I_1 = -2mv_{1x} \quad (2)$$

です。そして壁は、反作用として、その気体分子から同じ大きさで逆向きに力積を受けます。

これを t [s]間で考えてみると、その間に、この気体分子は $v_x t / (2L)$ 回この壁に衝突するので、 t [s]間にこの1個の気体分子がこの壁に及ぼす力積 $[N \cdot s]$ は、

$$I = 2mv_{1x} \times \frac{v_{1x}t}{2L} = \frac{mv_{1x}^2}{L}t \quad (3)$$

となります。ここで、気体分子が壁に及ぼす力は瞬間的ですが、それらの時間平均 \bar{f} [N]を考えると、これよる力積は $\bar{f}t$ [N·s]となるので、式(3)と比較して、壁に及ぼす力は、平均的に

$$\bar{f} = \frac{mv_{1x}^2}{L} \quad (4)$$

となることが分かります。

2. 複数の気体分子による圧力

気体分子数が N 個の場合、それぞれの気体分子が壁に及ぼす平均の力を \bar{f}_i ($i = 1, 2, \dots, N$)とおくと、 N 個の気体分子全体による力 $[N]$ は

$$F = \bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_N = \frac{Nm\overline{v_x^2}}{L} \quad (5)$$

となります。ここで、

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N}(v_{1x}^2 + \dots + v_{Nx}^2) \quad (6)$$

であり、気体分子の x 方向の二乗平均速度を表します。なお、このような集団についての平均をアンサンブル平均といいます。

したがって、壁にかかる圧力 p_x [Pa]は、式(5)の力 F [N]を壁の面積 L^2 [m²]で割って、

$$p_x = \frac{F}{L^2} = \frac{Nm\overline{v_x^2}}{L^3} = \rho\overline{v_x^2} \quad (7)$$

で与えられます。ここで ρ [kg/m³]はこの気体の密度であり、

$$\rho = \frac{Nm}{L^3} \quad (8)$$

で表されます。ところで、エネルギー等分配の法則により、気体分子の各方向の運動エネルギーは互いに等しく、

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_y^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_z^2} \quad (9)$$

が成り立ちます。よって、 N 個の気体分子の二乗平均速度(二乗速度のアンサンブル平均)は

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2} \quad (10)$$

のように書くことができます。したがって、壁にかかる圧力 p_x [Pa]、すなわち、この気体の圧力 p [Pa]は、この $\overline{v^2}$ を用いて

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2} \quad (11)$$

のように表すことができます。

この式を利用すると、具体的な分子の速さを見積ることができます。たとえば、常温常圧(20°C、1気圧(=1013 hPa))の空気の密度は、おおよそ $\rho = 1.2$ [kg/m³]ですので、この場合、 $\sqrt{\overline{v^2}} = 5.0 \times 10^2$ [m/s]に程度になります。

IV. 音圧と音響放射圧

1. 音圧

次に、この気体の圧力が、音波によってどのような影響を受けるのかを考えてみます。

ところで、気体や液体を伝わる音波は、基本的に縦波(疎密波)です。したがって、たとえば図3のように x 方向に伝播する平面波を考えると、媒質の振動変位は x 方向であり、時刻 t [s]、位置 x [m]における媒質の振動変位を $\xi(x, t)$ [m]と書くと、 ξ は次の波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (12)$$

に従うことが知られています。ここで、 c [m/s]は音速であり、この気体の体積弾性率を K [Pa]、密度を ρ [kg/m³]とすれば、

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (13)$$

で与えられます。

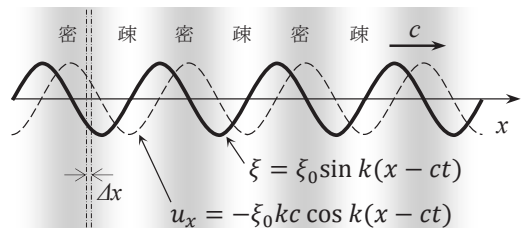


図3 音波の波形と媒質の疎密

式(12)の一般解は、 $g(\cdot)$ を任意の関数として

$$\xi(x, t) = g(k(x - ct)) \quad (14)$$

となります。ただし、 k [m⁻¹]は、波長 λ [m]、角周波数 ω [rad/s] (周波数 f [Hz])と $k = 2\pi/\lambda$ 、 $kc = \omega (= 2\pi f)$ の関係があります。特に $g(\cdot)$ として振幅 ξ_0 [m]の正弦波 (純音) を考えると

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ct) \quad (15)$$

と書くことができます。図 3 の実線で示した正弦波は、この縦波を横波表示したものです。

また式(15)より、媒質の振動速度 [m/s]は、

$$u_x = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\xi_0 kc \cos k(x - ct) \quad (16)$$

のようになります。図 3 の破線は、この波形を表示したものです。

一方、図 3 に示す幅 Δx の微小体積 $V = S\Delta x$ [m³]を考えると、 x 方向の振動変位 ξ によって体積は $V' = (\Delta x + \xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t))S$ に変化するので、体積変化率 (体積ひずみ) は

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{V' - V}{V} \\ &= \frac{\xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)}{\Delta x} \\ &\rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (\Delta x \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (17)$$

となります。したがって、圧力変化 [Pa]は、体積弾性率の定義および、式(13)より

$$\begin{aligned} \Delta p &= -K \frac{\Delta V}{V} = -K \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= -\xi_0 \rho c^2 k \cos k(x - ct) \\ &= \rho c u_x \end{aligned} \quad (18)$$

与えられます。この音波による圧力変化 Δp [Pa]を音圧といいます。式(18)から分かるように、音圧は周期的に変化し、時間平均は 0 になります。そこでその実効値

$$p = \sqrt{(\Delta p)^2} = \rho c \frac{\xi_0 \omega}{\sqrt{2}} \quad [\text{Pa}] \quad (19)$$

を考え、普通は、これを音圧といいます。

ちなみに、音圧は、ある基準となる音圧 p_0 [Pa]を考え、その何倍かを dB で表すのが一般的です。これを音圧レベルといい、

$$L_p = 20 \log \frac{p}{p_0} \quad [\text{dB}] \quad (20)$$

で定義されます。基準としては、人に聞こえる最小の音圧 $p_0 = 20 \times 10^{-6}$ Pa をとることが多く、その場合、それを明示するために、単位は [dB re. 20 μ Pa] のように表記されます。

2. 音響放射圧

x 方向に進む音波が存在すると、気体分子の速度の x 成分 v_x [m/s]に、 x 方向の振動速度 u_x [m/s]が加わるので、式(7)で与えられた x 軸に垂直な壁にかかる圧力 [Pa]は、 v_x のアンサンブル平均が 0 であることに注意すれば、

$$p_x' = \rho \overline{(v_x + u_x)^2} = p_x + \rho \overline{u_x^2} \quad (21)$$

になります。この第 2 項は、超音波のように振動速度が大きい場合、効果が現れてくると考えられます。なお、 $\overline{u_x^2}$ はアンサンブル平均ですが、エルゴード性より、時間平均とみなすことができます。これは、気体分子の運動エネルギーに起因した圧力の増加といえます。

一方、気体の密度 ρ [kg/m³]も音波によって変化します。その変化量を $\Delta\rho$ [kg/m³]とすると、密度増加率 $\Delta\rho/\rho$ は、ほぼ体積減少率 $(-\Delta V/V)$ に等しいので、式(17)より密度増加は

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= -\rho \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= -\xi_0 \rho k \cos k(x - ct) \end{aligned} \quad (22)$$

$$= \frac{\rho}{c} u_x$$

与えられます。これを考慮すると、式(18)の音圧 Δp [Pa]は、

$$\begin{aligned} \Delta p' &= (\rho + \Delta\rho) c u_x \\ &= \rho c u_x + \Delta\rho c u_x \\ &= \rho c u_x + \rho u_x^2 \end{aligned} \quad (23)$$

のようになります。ここで、音圧 $\Delta p'$ の時間平均を考えると、第 2 項は消えずに残ります。この項は $\Delta\rho/\rho$ あるいは $\Delta V/V$ に由来するので、媒質に蓄えられた弾性エネルギーの増加に起因した圧力の増加と考えることができます。

以上より、壁に加わる圧力 [Pa]の時間平均は、式(21)と、式(23)の時間平均の和によって

$$p' = p_x + \rho c \overline{u_x} + 2\rho \overline{u_x^2} \quad (24)$$

で与えられることが分かります。ここで、第1項は式(7)の静圧、第2項は式(18)の音圧で、時間平均は0、そして平均が0でない第3項が求める音響放射圧になります。それを P [Pa]とおいて、式(18)、(19)を利用すると

$$P = 2\rho \overline{u_x^2} = 2 \frac{p^2}{\rho c^2} \quad (25)$$

を得ます。これは式(1)に他なりません。

これを用いて、たとえば音圧 $p = 150$ dB re. $20\mu\text{Pa}$ の超音波の音響放射圧を見積ると、常温常圧(20°C、1気圧)で約5.6 Paになります。これは、大気圧に比べれば桁違いに小さいですが、軽いものなら浮かすことができます。

3. 音波のエネルギー密度と音響放射圧

音波による気体分子の運動エネルギー密度は、

$$E_K = \frac{1}{2} \rho \overline{u_x^2} \quad (26)$$

で与えられます。一方、媒質に蓄えられる弾性エネルギー密度は、

$$E_U = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho c^2} \quad (27)$$

で与えられます。音波の全エネルギーは、この両者の和になりますが、式(18)、(19)またはエネルギー等分配の法則により、この両者は等しいので、この音波のエネルギー密度[J/m³]は

$$E = E_K + E_U = \rho \overline{u_x^2} \quad (28)$$

と書くことができます。よって、全反射の場合の音響放射圧 P [Pa]は、音波のエネルギー密度 E [J/m³]の2倍、すなわち

$$P = 2\rho \overline{u_x^2} = 2E \quad (29)$$

であることが示されます。

V. 音の反射・吸収・透過と音響放射圧

1. 吸収や透過がある場合

全反射の場合、音響放射圧 P [Pa]は音波のエネルギー密度 E [J/m³]の2倍でしたが、音波が物体内部に伝播し、透過あるいは吸収される場合は、2倍より小さくなります。その値を α

とおけば、音響放射圧[Pa]は、一般に

$$P = \alpha \frac{p^2}{\rho c^2} \quad (30)$$

と書くことができます。この係数 α と透過率、吸収率との関係については、エネルギー的に考えると理解しやすくなります。

すなわち、エネルギー保存の法則より、反射される音波、吸収される音波、透過する音波のエネルギー密度の合計は、入射された音波のエネルギー密度に等しくなるので、反射率、吸収率、透過率をそれぞれ R 、 A 、 T とおくと、

$$R + A + T = 1 \quad (31)$$

の関係が成り立ちます。ここで、全反射($R = 1$ 、 $A = T = 0$)では $\alpha = 2$ 、全て透過する場合($T = 1$ 、 $R = A = 0$)は $\alpha = 0$ ですので、一般の場合の音響放射圧[Pa]は

$$P = (1 + R - T) \frac{p^2}{\rho c^2} \quad (32)$$

のように書くことができます。

2. 斜め入射

音波が壁面に斜めに入射した場合、図4のように音波の入射角を θ とすると、音響放射圧の法線方向の大きさは、垂直入射の場合の音響放射圧を P_0 [Pa]とすれば、

$$P = P_0 \cos \theta \quad (33)$$

のように与えられます。よって、入射方向(x 方向)の成分 P_x [Pa]は、図4から、

$$P_x = P_0 \cos^2 \theta \quad (34)$$

のように与えられます。

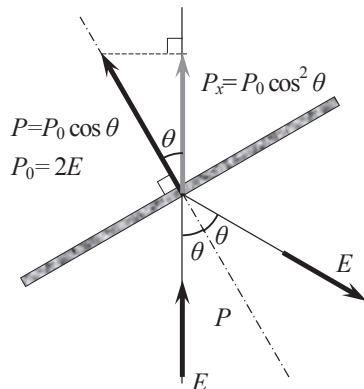


図4 斜め入射

3. 拡散反射

いままでは、音波が広がらずに特定の向きに反射される「鏡面反射」を扱ってきましたが、物体表面が粗い場合、音波は四方八方に「拡散反射」されます。本稿では簡単のために、図5のように、物体表面に垂直入射した入射波 E が、等方的に拡散反射する場合を考えます。また、透過や吸収はないとします。

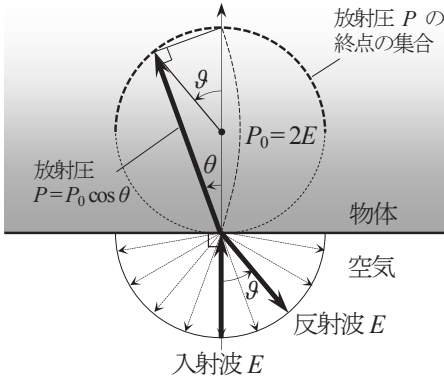


図5 等方的な拡散反射の放射圧

さて、拡散は、表面が色々な向きを向いているために起こると考えれば、放射圧は、前節の斜め入射の放射圧を色々な角度で足し合わせれば求まります。いま図5の散乱角 $\vartheta (= 2\theta)$ の反射波 E に着目すると、この反射波による放射圧 P は式(33)で与えられますが、散乱角は $\vartheta = 0 \sim \pi/2$ であり、また入射軸のまわりの角は $\varphi = 0 \sim 2\pi$ なので、放射圧 P の矢印の終点は、図中の太い破線のような半球殻を形成します。求める音響放射力 P [Pa] は、この矢印の和で与えられますが、これはこの半球殻の重心計算に他ならず、放射圧 P の x 成分 (式(34)) をその半球殻について積分すれば、

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} P_0 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\
 &= \frac{P_0}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \\
 &= \frac{P_0}{2} \int_0^1 (1 + c) \, dc \quad (c \equiv \cos \vartheta) \\
 &= \frac{3}{4} P_0 = \frac{3}{2} E
 \end{aligned} \tag{35}$$

になります。すなわち完全反射の場合、等方的な拡散反射の音響放射圧の係数は、 $\alpha=1.5$ になることが分かります。なお、散乱に指向性がある場合は、係数 α は $1.5 \sim 2.0$ になります。

VI. おわりに

今回は、空中超音波の音響放射圧を、気体分子運動論によって考察しましたが、ここでの議論は、気体のような粘性のない希薄な流体を想定しています。しかし、音響放射圧は水中超音波など液体中でも現れますので、これらを含めて一般的に音響放射圧を論じるためには、流体力学的なアプローチも必要になると思われます。これには、他に詳しい解説 ⁹⁾があるもので、そちらを参照して頂ければ幸いです。

【注】

- 1) たとえば、阿部 豊, 長谷川 浩司: 「小特集 — 超音波 によるマニピュレーション技術の動向 — 超音波による浮遊液滴の制御」, 日本音響学会誌, 2013, Vol. 69, No. 11, pp. 591-596.
- 2) たとえば、山川 誠: 「超音波エラストグラフィの原理」, バイオメカニズム学会誌, 2016, Vol. 40, No. 2, pp. 73-78.
- 3) たとえば、岩本 貴之, 篠田 裕之: 「音響放射圧の走査による触覚ディスプレイ」, 日本バーチャルリアリティ学会論文誌, 2006, Vol. 11, No. 1, pp. 77-86.
- 4) Motoaki Sano, Yutaka Nakagawa, Tsuneyoshi Sugimoto, Takashi Shirakawa, Kaoru Yamagishi, Toshiaki Sugihara, Motoyoshi Ohaba, and Sakae Shibusawa: "Estimation of Water Stress of Plant by Vibration Measurement of Leaf using Acoustic Radiation Force", Acoust. Sci. & Tech., 2015, Vol. 36, No. 3, pp.248-253.
- 5) 実吉 純一, 菊池 喜充, 能本 乙彦 監修: 「超音波技術便覧 (新訂版)」, 日刊工業新聞社, 1978, pp. 432-434.
- 6) たとえば、日本音響学会編 (鎌倉 友男 編著、他 6 名共著): 「非線形音響—基礎と応用」, コロナ社, 2014.